Feladat 1. *(1pt) Adjunk meg egy izomorfizmust a* $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3+x^2+2)$ *és a* $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3+2x+1)$ *testek között.*

Feladat 2. *(1pt) Tekintsük a következő kódolást:*

$$\mathbb{Z}_2^{10} \to \mathbb{Z}_2^{19}, \quad (x_1,\dots,x_{10}) \mapsto (x_1, x_1x_2, \dots, x_1\dots x_{10}, x_2\dots x_{10}, \dots, x_9x_{10}, x_{10}).$$

Mennyi ennek a kódolásnak a minimális távolsága?

Feladat 3. *(2pt) Tekintsük a következő kódolást:*

$$\mathbb{Z}_2^{10} \to \mathbb{Z}_2^{45}, \quad (x_1,\dots,x_{10}) \mapsto (x_1+x_2, x_1+x_3, \dots, x_8+x_{10}, x_9+x_{10}).$$

Mennyi ennek a kódolásnak a minimális távolsága?

Feladat 4. *(2pt) Hány hatodfokú irreducibilis polinom van* $\mathbb{Z}_3$ *felett?*

Feladat 5. *(2pt) Hány negyedfokú irreducibilis polinom van a négyelemű test felett?*

Feladat 6. *(2pt) Léteznek olyan* $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_n$ *testek, hogy* $\mathbf{K}_0 = \mathbb{Q}$, $\mathbf{K}_n = \mathbb{A}$ *(*$\mathbb{A}$ *az algebrai számok teste), és minden* i*-re* $\mathbf{K}_{i+1} \mid \mathbf{K}_i$ *egyszerű testbővítés?*

Feladat 7. *(2pt) Mennyi az* x^5+x^2 *polinom által meghatározott* $\mathbb{Z}_2^{10} \to \mathbb{Z}_2^{15}$ *kódolás minimális távolsága?*

Feladat 8. *(2pt) Mennyi az* $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ *polinom által meghatározott* $\mathbb{Z}_2^{10} \to \mathbb{Z}_2^{15}$ *kódolás minimális távolsága?*

Feladat 9. *(3pt) Egy* $\mathbf{L} \mid \mathbb{Z}_2$ *testbővítés esetén legyen* $f(\mathbf{L})$ *a* $\mathbb{Z}_2$ *fölötti* $\mathbf{L}$*-ben irreducibilis harmadfokú főpolinomok száma. Mik* $f(\mathbf{L})$ *lehetséges értékei?*

Feladat 10. *(3pt) Legyen* $\mathbf{K}$ 16 *elemű test. Minden* $x \in K$*-ra tekintjük a*

$$\delta_x : \operatorname{Aut}\mathbf{K} \to \mathbf{K}, \quad \varphi\delta_x := x\varphi$$

leképezést. Hány olyan $x \in K$ *van, amelyre* δ_x *injektív?*

Feladat 11. *(3pt) Legyenek* n *és* k *természetes számok. Igazoljuk, hogy*

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\sqrt[k]{n}) = \frac{k}{\max\{l \in \mathbb{N} :\, l \mid k,\, \exists r \in \mathbb{N} :\, n = r^l\}}.$$

Feladat 12. *(3pt) Tekintsük a* $(\mathbb{Z}[x], +, -, 0)$ *Abel-csoportot. Megadható ezen a struktúrán szorzás úgy, hogy a kapott struktúra test legyen?*

Feladat 13. *(3pt) Igazoljuk, hogy véges testben minden művelet polinomfüggvény, vagyis minden* $f : K^n \to K$ *esetén létezik olyan* $p \in \mathbf{K}[x_1,\dots,x_n]$ *polinom, hogy minden* $(k_1,\dots,k_n) \in K^n$ *esetén* $p(k_1,\dots,k_n) = f(k_1,\dots,k_n)$*.*

Feladat 14. *(3pt) Legyen* $\mathbf{F}$ *véges test,* $m := |F| - 1$*. Ha* d *primitív elem* $\mathbf{F}$*-ben, u pedig bármilyen nemnulla elem, akkor* $\log_d u$ *alatt azt az* s*, modulo* m *meghatározott számot (tehát tulajdonképpen* $\mathbb{Z}_m$*-beli elemet) értjük, amelyre* $d^s = u$*. Legyenek* $a, b, c \in F$ *primitív elemek. Teljesül a*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

azonosság a $\mathbb{Z}_m^*$ *csoportban (vagyis a redukált modulo m maradékosztályok multiplikatív csoportjában)?*

Feladat 15. *(4pt) Van-e olyan végtelen test, amelynek minden nemtriviális részgyűrűje résztest?*

Feladat 16. *(4pt) Igaz, hogy ha egy test minden valódi részteste megszámlálható, akkor a test maga is megszámlálható?*

Feladat 17. *(4pt) Igaz, hogy ha* $\mathbf{L}\,|\mathbf{K}_1$*,* $\mathbf{L}\,|\mathbf{K}_2$ *úgy, hogy* $\mathbf{L}$ *algebrai lezártja a* $\mathbf{K}_1$ *és a* $\mathbf{K}_2$ *testnek is, akkor* $\mathbf{L}$ *algebrai lezártja a* $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2$ *testnek?*

Feladat 18. *(4pt) Igazoljuk, hogy tetszőleges* $f \in \mathbb{Z}_2[x]$ *nemkonstans irreduciblis polinom esetén van olyan* $n \in \mathbb{N}$*, hogy az* f *által meghatározott* $\mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^{n+\deg f}$ *kódolás nem hibajavító.*